Om Formen for Integralet af den lineære Differentialligning af anden Orden.

Af **Adolph Steen.**

---

1. Naar Differentialligningen

$$\frac{d^2u}{dx^2} - Xu = 0, \tag{1}$$

hvortil som bekjendt enhver saadan Ligning af anden Orden kan reduceres, har de to partikulære Integraler u_1 og u_2, saa faas ved deres Indsættelse og Elimination af X

$$u_2\frac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\frac{d^2u_2}{dx^2} = 0,$$

der ved delvis Integration igjen frembringer

$$u_2\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du_2}{dx} = c, \tag{2}$$

hvor c er en arbitrær konstant. Integration af (2) med Hensyn til u_2 frembringer den bekjendte Relation imellem de partikulære Integraler

$$u_2 = -cu_1\int\frac{dx}{u_1^2}.$$

Men benyttes u_1 og u_2 uden arbitrære konstante Faktorer, saa kan man altid sætte $-c = 1$, altsaa

$$u_2\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du_2}{dx} = -1. \tag{3}$$

Indføres nu

$$u_1 = r\cos\theta,\ u_2 = r\sin\theta, \tag{4}$$

saa giver (3)

$$r^2\frac{d\theta}{dx} = -1 \tag{5}$$

og (4)

$$r^2 = u_1^2 + u_2^2. \tag{6}$$

Men af (1) med u_1 og u_2 for u udledes derefter

$$u_1\frac{d^2u_1}{dx_2} + u_2\frac{d^2u_2}{dx_2} = Xr^2,$$

Differentiation af (4) fører til

$$\frac{du_1^2}{dx^2} + \frac{du_2^2}{dx^2} = \frac{dr^2}{dx^2} + \frac{1}{r^2}$$

og Differentiation af (6) giver

$$u_1\frac{d^2u_1}{dx^2} + u_2\frac{d^2u_2}{dx^2} + \frac{du_1^2}{dx^2} + \frac{du_2^2}{dx^2} = r\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{dr^2}{dx^2},$$

saa at endelig

$$r\frac{d^2r}{dx^2} - Xr^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Denne Ligning i Forbindelse med (5) danner Systemet

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2r}{dx^2} - Xr &= \frac{1}{r^3},\\ r^2\frac{d\theta}{dx} &= -1,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

som kan træde istedenfor (1). Det er tilstrækkeligt at finde et partikulært Integral af den første (7), og derpaa af den anden bestemme det tilsvarende θ; men det vil kun ganske undtagelsesvis være lettere at finde et saadant Integral end at bestemme det af (1). Exempel derpaa afgiver dog den Ligning, hvor $X = \frac{a^2}{x^4}$, da man af den første (7) strax ser, at Formen $r = Ax$ kan bruges, og man faar da $A = \sqrt[4]{\frac{-1}{a^2}}$.

2. Ligningerne (7) have derfor deres væsenligste Betydning deri, at de føre til en fælles Form for Integralet af enhver Ligning af Formen (1), nemlig for de partikulære

$$u_1 = r\cos\int\frac{dx}{r^2}, \quad u_2 = r\sin\int\frac{dx}{r^2}, \tag{8}$$

og altsaa for det fuldstændige

$$u = Ar\sin\left(B + \int\frac{dx}{r^2}\right). \tag{9}$$

Disse Former kunne paa sædvanlig Maade ombyttes med de exponentielle, nemlig for det fuldstændige Integral

$$u = r\left(Ae^{\int\frac{dx}{r^2}} + Be^{-\int\frac{dx}{r^2}}\right), \tag{10}$$

men i dette Tilfælde maa der for r indføres $r\sqrt[4]{-1}$ i (7), saa at den første (7) bliver til

$$\frac{d^2r}{dx^2} - Xr + \frac{1}{r^3} = 0. \tag{11}$$

Til samme Tid gjælder heller ikke (6), men man har $r = 2u_1 u_2$, hvilket ogsaa kan faas ad den i 1 fulgte Vej.

Er X konstant, f. Ex. $X = \mp a^2$, kan ogsaa r tages konstant og henholdsvis bestemmes af (7) og (11), i begge Tilfælde som $r^2 = \pm\frac{1}{a}$, hvorefter (9) og (10) give de bekjendte Resultater.

Antog man $\frac{d^2r}{dx^2} = 0$, fik man $r = ax + b$, altsaa henholdsvis af (7) og af (11) $r = (\mp X)^{-\frac{1}{4}}$. Dette giver

$$X = \mp\frac{1}{(ax+b)^4},$$

saa at

$$\frac{d^2u}{dx^2} \pm \frac{u}{(ax+b)^4} = 0 \tag{12}$$

for øverste Fortegn har Integralet

$$u = A\,(ax+b)\sin\left(B + \frac{1}{a\,(ax+b)}\right)$$

og for nederste

$$u = (ax+b)\left(A\,e^{\frac{1}{a(ax+b)}} + B\,e^{-\frac{1}{a(ax+b)}}\right).$$

Sætter man $\frac{d^2r}{dx^2} = 2$, saa kan man skrive

$$r = (x-\alpha)^2 + \beta^2,$$

idet α og β ere arbitrære konstante. Man vil dernæst af (7) og (11) henholdsvis faa

$$X = \frac{2}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \mp \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^4},$$

saa at Ligningerne

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{2}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \mp \frac{1}{((x-\alpha^2)+\beta^2)^4}\right)u = 0, \qquad (13)$$

med Betegnelsen

$$\int\frac{dx}{r^2} = \xi = \frac{\beta^3}{4}\,\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{3\beta^3}{4}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x-\alpha}{\beta}\right),$$

faa følgende Integraler, for øverste Fortegn

$$u = A\,((x-\alpha)^2+\beta^2)\sin(B+\xi),$$

og for nederste

$$u = \left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)\left(Ae^{\xi} + Be^{-\xi}\right).$$

Overhovedet kan der dannes en stor Mængde integrable Differentialligninger ved Valget af forskjellige r, og de have til fælles almindelig Typus

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{1}{r}\,\frac{d^2r}{dx^2} \mp \frac{1}{r^2}\right)u = 0$$

med henholdsvis efter Fortegnet Integralet (9) eller (10).

3. Formen af den Funktion, r maa være af x, vil stille sig höjst forskjellig. For den af Liouville undersøgte Ligning (1), hvori X er hel algebraisk rational, kan man saaledes vise, at r ikke kan være nogen explicit algebraisk Funktion.

r kan ikke være en hel Funktion, thi saa vilde (7) under Formen

$$r^3\left(\frac{d^2r}{dx^2}-Xr\right)=1$$

kræve, at r gik op i 1, hvilket er umuligt.

Antog man dernæst $r=\frac{\varrho}{\varrho_1}$, en uforkortelig rational brudden Funktion, saa fik man af (7)

$$\varrho^3\left[\varrho_1\left(\varrho_1\frac{d^2\varrho}{dx^2}-\varrho\frac{d^2\varrho_1}{dx^2}\right)-2\left(\varrho_1\frac{d\varrho}{dx}-\varrho\frac{d\varrho_1}{dx}\right)\frac{d\varrho_1}{dx}-X\varrho\varrho_1^2\right]=\varrho_1^6,$$

saa at ϱ^3 maatte gaa op i ϱ_1^6 imod Forudsætningen.

Var endelig $r=\varrho^{\frac{1}{p}}$, p hel större end 1, altsaa ϱ irrational af lavere Orden end r eller rational, saa fik man

$$\varrho^{\frac{4}{p}}=\frac{1}{\frac{1}{p\varrho}\frac{d^2\varrho}{dx^2}+\frac{1}{p\varrho^2}\left(\frac{1}{p}-1\right)\frac{d\varrho^2}{dx^2}-X}.$$

Men heri vilde venstre Side være irrational af höjere Orden end højre, med mindre p gik op i 4, altsaa $p=2$ eller $p=4$. For disse Værdier faas:

$$p=2,\ X=\frac{1}{2\varrho}\frac{d^2\varrho}{dx^2}-\frac{1}{4\varrho}\frac{d\varrho^2}{dx^2}-\frac{1}{\varrho^2},$$

$$p=4,\ X=\frac{1}{4\varrho}\frac{d^2\varrho}{dx^2}-\frac{3}{16\varrho^2}\frac{d\varrho^2}{dx^2}-\frac{1}{\varrho},$$

hvoraf ses, at rationale ϱ giver brudne X, begge Dele imod Forudsætningen.

Da Liouville har bevist, at (1) for X hel algebraisk rational af lige Grad, undertiden kan have Integraler af Formen

$$Ye^{\int Qdx} \text{ og } Ze^{\int Qdx},$$

hvor Y, Z og Q ere hele algebraiske Funktioner, bemærkes, at r og $\frac{1}{r^2}$ slet ikke svare til Liouvilles Betegnelser Y, Z og Q, saa at de her fundne Resultater ingenlunde ere i Strid med det forhen bekjendte.

4. De i 2 angivne Exempler foranledige en Undersøgelse af, hvorvidt r kan staa i særegne Relationer til X. Saaledes kan man undersøge, naar man kan have

$$r = X^{-\frac{1}{4}} z;$$

men hvis z heri skal være en Funktion af x, bliver den afhængig af en endnu mere sammensat Differentialligning end de foregaaende. Skal derimod z være konstant, saa giver (7) og (11) henholdsvis

$$\tfrac{1}{4} X^{-2} \frac{d^2 X}{dx^2} - \tfrac{5}{16} X^{-3} \frac{dX^2}{dx^2} + 1 \pm \frac{1}{z^4} = 0,$$

hvoraf

$$\frac{dX^2}{dx^2} = 16\, a\, X^{\frac{5}{2}} - 16\left(1 \pm \frac{1}{z^4}\right) X^3,$$

idet $16\,a$ er den arbitrære konstant. Derefter findes

$$x = \pm \int \frac{X^{-\frac{3}{2}}\, dX}{4\sqrt{a X^{-\frac{1}{2}} - \left(1 \pm \frac{1}{z^4}\right)}},$$

som for $a \lesseqgtr 0$ giver

$$ax + b = \pm \sqrt{a X^{-\frac{1}{2}} - \left(1 \pm \frac{1}{z^4}\right)},$$

men for $a = 0$

$$x + b = \mp \tfrac{1}{2} X^{-\frac{1}{2}} \sqrt{-\frac{z^4}{z^4 \pm 1}}.$$

Hertil svare

$$X = \frac{a^2}{\left((ax + b)^2 + 1 \pm \frac{1}{z^4}\right)^2}$$

og

$$X = -\frac{z^4}{4\,(1 + z^4)\,(x + b)^2}.$$

Det sidste giver den bekjendte Differentialligning

$$\frac{du^2}{dx^2} \pm \frac{a^2}{(x + b)^2}\, u = 0 \qquad (14)$$

med

$$\frac{\pm z^4}{4\,(1 \pm z^4)} = a^2, \text{ altsaa } z = \sqrt[4]{\pm \frac{4\,a^2}{1 - 4\,a^2}}.$$

Men det første giver den nye Differentialligning

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{a^2}{((ax+b)^2+c^2)^2}\,u = 0, \qquad (15)$$

idet

$$z = \sqrt[4]{\pm\frac{1}{c^2-1}}.$$

For denne bliver altsaa

$$r^2 = \sqrt{\pm\frac{1}{c^2-1}}\;\frac{(ax+b)^2+c^2}{a},$$

saa at man faar henholdsvis ifølge (9) og (10)

$$\left.\begin{array}{ll} u = A\sqrt{\dfrac{(ax+b)^2+c^2}{a}}\sin\left(B+\dfrac{\sqrt{c^2-1}}{c}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\dfrac{ax+b}{c}\right)\right), & c>1 \\ \text{og} & \\ u = \sqrt{\dfrac{(ax+b)^2+c^2}{a}}\left(Ae^{\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}T}+Be^{-\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}T}\right), & c<1 \end{array}\right\}(16)$$

hvor

$$T = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{ax+b}{c}\right).$$

Disse Resultater gjælde slet ikke for $c = 0$, men i saa Tilfælde reduceres (15) til den nederste (12). De forudsætte endvidere, at z er endelig eller $c \gtrless 1$; $c = 1$ gjör $z = \infty$ og r kan ikke have den antydede Form. Imidlertid kan dog (16) bruges, idet det fuldstændige Integral reduceres til det partikulære

$$u_1 = \sqrt{\frac{(ax+b)^2+1}{a}},$$

som virkelig tilfredsstiller Ligningen

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{a^2}{((ax+b)^2+1)^2}\,u = 0, \qquad (17)$$

saa at derefter det fuldstændige Integral faas saaledes

$$u = \sqrt{\frac{(ax+b)^2+1}{a}}\,(A + B\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = ax+b)).$$

Lignende Bemærkninger kunne gjöres med Hensyn til (14), hvis fuldstændige Integral for $a^2 = \frac{1}{4}$ kan reduceres til det partikulære $(x+b)^{\frac{1}{2}}$.

5. Fremdeles giver Ligning (13) (jfr. Slutningen af 2) Anledning til at undersøge, hvorvidt

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(X \mp \frac{1}{r^4}\right) u = 0 \tag{18}$$

kan have Integralet (9) eller (10) henholdsvis for øverste og nederste Fortegn. Da man faar

af (9) $$\frac{d^2u}{dx^2} = A\left(\frac{d^2r}{dx^2} - \frac{1}{r^3}\right) \sin\left(B + \int\frac{dx}{r^2}\right)$$

og af (10) $$\frac{d^2u}{dx^2} = \left(Ae^{+\int\frac{dx}{r^2}} + Be^{-\int\frac{dx}{r^2}}\right)\left(\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{1}{r^3}\right),$$

saa maa i begge Tilfælde Betingelsen være

$$\frac{d^2r}{dx^2} - Xr = 0, \tag{19}$$

hvilket stemmer med hvad der umiddelbart kunde udledes af (1) og den første (7) og (11). Heraf indses følgende

Theorem:

Naar

$$\frac{d^2r}{dx^2} - Xr = 0$$

bestemmer r, saa vil

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(X \mp \frac{1}{r^4}\right) u = 0$$

have sit fuldstændige Integral saaledes bestemt for øverste Tegn

$$u = Ar \sin\left(B + \int\frac{dx}{r^2}\right),$$

for nederste

$$u = r\left(Ae^{\int\frac{dx}{r^2}} + Be^{-\int\frac{dx}{r^2}}\right).$$

Herpaa kunne flere interessante Udvidelser af de integrable Ligningers Antal støtte sig. Saaledes vil

$$\frac{d^2r}{dx^2} + a^2r^2 = 0$$

give r under følgende almindelige Former

$$r = \alpha \sin(ax + \beta) \text{ eller } r = \alpha \cos(ax + \beta),$$

idet α og β ere de arbitrære konstante. Heraf dannes

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(a^2 \pm \frac{1}{\alpha^4 \sin^4(ax + \beta)}\right) u = 0, \tag{20}$$

som har Integralet bestemt
for øverste Tegn ved

$$u = A \sin(ax + \beta) \sin\left(B - \frac{1}{a\alpha^2} \cot(ax + \beta)\right),$$

og for nederste

$$u = \sin(ax + \beta) \left(Ae^{\frac{1}{a\alpha^2}\cot(ax + \beta)} + Be^{-\frac{1}{a\alpha^2}\cot(ax + \beta)}\right).$$

Den anden Form for r giver et analogt Resultat med cos. og tg. istedetfor sin. og cot.

Gaar man ud fra

$$\frac{d^2 r}{dx^2} - a^2 r = 0,$$

hvorved

$$r = \alpha^2 e^{ax} + \beta^2 e^{-ax},$$

med α^2 og β^2 til arbitrære konstante, saa vil for Ligningen

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \left(a^2 \mp \frac{1}{(\alpha^2 e^{ax} + \beta^2 e^{-ax})^4}\right) u = 0 \tag{21}$$

Integralet blive henholdsvis

$$u = A(\alpha^2 e^{ax} + \beta^2 e^{-ax}) \sin(B + T)$$

og
$$u = (\alpha^2 e^{ax} + \beta^2)(Ae^{T} + Be^{-T}),$$

hvor
$$T = \frac{e^{-ax}}{2a\alpha^2(\alpha^2 e^{ax} + \beta^2 e^{-ax})}.$$

Gaar man dernæst ud fra

$$\frac{d^2 r}{dx^2} \mp \frac{a^2}{x^2} r^2 = 0,$$

saa har man

for øverste Tegn

$$r = x^{\frac{1}{2}}\left(Ax^{\frac{\sqrt{1+4a^2}}{2}} + Bx^{-\frac{\sqrt{1+4a^2}}{2}}\right)$$

for nederste,

idet $a^2 < \frac{1}{4}$, $r = x^{\frac{1}{2}}\left(Ax^{\frac{\sqrt{1-4a^2}}{2}} + Bx^{-\frac{\sqrt{1-4a^2}}{2}}\right)$,

$a^2 = \frac{1}{4}$, $r = x^{\frac{1}{2}}(A + B\,l\,x)$,

$a^2 > \frac{1}{4}$, $r = Ax^{\frac{1}{2}} \sin\left(B + \frac{\sqrt{4a^2-1}}{2}\,l\,.\,x\right)$.

Naar man i de to første Udtryk for r indfører henholdsvis

$$\alpha = \frac{\sqrt{1+4a^2}}{2} \text{ og } \alpha = \frac{\sqrt{1-4a^2}}{2},$$

altsaa sætter

$$a^2 = \pm\frac{4\alpha^2 - 1}{4},$$

saa faar man i begge Tilfælde de nye Differentialligninger

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{4\alpha^2 - 1}{4x^2} \mp \frac{1}{x^2(Ax^\alpha + Bx^{-\alpha})^4}\right)u = 0, \tag{22}$$

som med øverste Fortegn har det fuldstændige Integral

$$u = Cx^{\frac{1}{2}}(Ax^\alpha + Bx^{-\alpha}) \sin\left(C_1 + \int\frac{dx}{x(Ax^\alpha + Bx^{-\alpha})^2}\right),$$

hvor C og C_1 ere de arbitrære konstante, og med nederste,

idet Integralet $\int\frac{dx}{r^2} = S$,

$$u = x^{\frac{1}{2}}(Ax^\alpha + Bx^{-\alpha})(Ce^S + C_1e^{-S}).$$

Til det andet af ovenstaaende Udtryk for r svarer Differentialligningerne

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{1}{4x^2} \mp \frac{1}{x^2(A + Bl\,.\,x)^4}\right)u = 0, \tag{23}$$

hvoraf med øverste Tegn

$$u = Cx^{\frac{1}{2}}(A + Bl\,.\,x) \sin\left(C_1 - \frac{1}{B(A + Bl\,.\,x)}\right)$$

og med nederste

$$u = x^{\frac{1}{2}}(A + Bl\,.\,x)\left(Ce^{\frac{1}{B(A+Bl.x)}} - C_1 e^{-\frac{1}{B(A+Bl.x)}}\right).$$

Endelig naar i det tredie Udtryk for r sættes

$$\alpha = \frac{\sqrt{4a^2 - 1}}{2}, \text{ altsaa } a^2 = \frac{\sqrt{4\alpha^2 + 1}}{4},$$

saa kommer man til de to Ligninger

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{4\alpha^2 + 1}{4x^2} \mp \frac{1}{A^4 x^2 \sin^4 (B + \alpha l\,.\,x)}\right) u = 0, \qquad (24)$$

hvoraf Integralet for øverste Tegn er

$$u = Cx^{\frac{1}{2}} \sin (B + \alpha l\,.\,x) \sin \left(C_1 - \frac{\cot (B + \alpha l\,.\,x)}{\alpha A^2}\right)$$

og for nederste

$$u = x^{\frac{1}{2}} \sin (B + \alpha l\,.\,x) \left(Ce^{\frac{\cot (B+\alpha l.x)}{\alpha A^2}} + C_1 e^{-\frac{\cot (B+\alpha l.x)}{\alpha A^2}}\right).$$

6. Den Funktion r, af hvilken Integrationen af (1) er afhængig, kan dog ogsaa bestemmes af en lineær Differentialligning. Man faar den af (7) eller (11) i samme Form, fordi disse to Ligninger tilfredsstilles af to r, som kun ere forskjellige ved en konstant Faktor, og denne kan udelades i et partikulært Integral af en lineær Differentialligning. De to Ligninger kunne faa Formen

$$r^2 \left(r \frac{d^2r}{dx^2} + \frac{dr^2}{dx^2}\right) - r^2 \frac{dr^2}{dx^2} - Xr^4 = \pm 1$$

eller

$$\tfrac{1}{2}\, r^2 \frac{d^2.\,r^2}{dx^2} - \tfrac{1}{4} \left(\frac{d\,.\,r^2}{dx}\right)^2 - Xr^4 = \pm 1.$$

Differentiation og Division med $\frac{1}{2} r^2$ giver

$$\frac{d^3.\,r^2}{dx^3} - 4\,X \frac{d\,.\,r^2}{dx} - 2 \frac{dX}{dx} r^2 = 0. \qquad (25)$$

Altsaa gjælder følgende

Theoremer:

I. Differentialligningen

$$\frac{du^2}{dx^2} - Xu = 0 \qquad (1)$$

har sit fuldstændige Integral af en af Formerne

$$u = Ar \sin\left(B + \int \frac{dx}{r^2}\right) \tag{9}$$

eller

$$u = r\left(Ae^{\int \frac{dx}{r^2}} + Be^{-\int \frac{dx}{r^2}}\right), \tag{10}$$

idet r^2 er et partikulært Integral af

$$\frac{d^3 . r^2}{dx^3} - 4X \frac{d . r^2}{dx} - 2\frac{dX}{dx} r^2 = 0. \tag{25}$$

II. Omvendt. Differentialligningen (25) har et partikulært Integral af en af Formerne

$$r^2 = u_1^2 + u_2^2$$

eller

$$r^2 = 2u_1 u_2,$$

idet u_1 og u_2 ere partikulære Integraler af (1).

7. Som Anvendelse af det første af disse Theoremer kan mærkes det Tilfælde, hvor

$$\frac{d^3 . r^2}{dx^3} = 24a,$$

hvilket giver

$$r^2 = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

og derefter

$$X = \frac{12a(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)}{(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2},$$

hvor dog e er en konstant, som ikke er arbitrær, naar Theoremet skal gjælde. Man finder, at

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{12a(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)}{(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2} u = 0 \tag{26}$$

har det fuldstændige Integral

$$u = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^{\frac{1}{2}} \sin\left(B + \int \frac{dx}{4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d}\right), \tag{27}$$

saafremt

$$12ae = 3bd - c^2 - 1.$$